Zemin Mekaniği ve Geoteknik Mühendisliği
20. Ulusal Konferansı

15-16 Ekim 2026
Sakarya Üniversitesi

BASINÇ VE LODE AÇISI BAĞIMLI VİSKOPLASTİK BİR BÜNYE MODELİ

A PRESSURE- AND LODE ANGLE- DEPENDENT VISCOPLASTIC CONSTITUTIVE MODEL

Yusuf KAYAN[1], Pietro MARVEGGIO[2], Claudio di PRISCO[3]

ÖZET

Zeminler üzerinde gerçekleştirilen deneysel çalışmalar, zeminlerin yükleme hızı, gerilme seviyesi ve gerilme yolu gibi etkenlere bağlı olarak karmaşık dayanım ve akma davranışları sergilediğini göstermektedir. Klasik elastoplastik bünye modelleri bu davranışların bir kısmını belirli koşullar altında temsil edebilse de deformasyon hızı bağımlı inelastik deformasyonların gelişimini açıklamakta çoğu zaman yetersiz kalmaktadır. Bu nedenle bu çalışmada Perzyna tipi viskoplastik formülasyon ile basınca ve Lode açısına bağlı Mortara akma yüzeyi birlikte kullanılarak zeminlerin hız bağımlı davranışını temsil etmeye yönelik bir bünye modeli çerçevesi sunulmuştur. Modelde viskoplastik deformasyonlar akma yüzeyi dışındaki gerilme durumunu ifade eden normalize edilmiş aşırı-gerilme büyüklüğüne bağlı olarak tanımlanmıştır. Formülasyonun davranışını değerlendirmek amacıyla drenajlı üç eksenli basınç koşulları altında eleman testleri gerçekleştirilmiştir. Bu kapsamda eksenel birim şekil değiştirme hızı ve viskoplastik akış parametresi değiştirilerek modelin gerilme–birim şekil değiştirme cevabı ve aşırı gerilme gelişimi üzerindeki etkileri incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar, yükleme hızının artmasıyla birlikte daha yüksek deviatorik gerilme ve aşırı gerilme seviyelerinin oluştuğunu, buna karşılık değerinin artmasıyla viskoplastik akışın daha hızlı gelişerek aşırı-gerilme seviyesini azalttığını göstermiştir. Bu sonuçlar, kullanılan Perzyna–Mortara tabanlı formülasyonun drenajlı üç eksenli koşullar altında hız bağımlı inelastik zemin davranışını temsil etme potansiyeline sahip olduğunu ortaya koymaktadır.
Anahtar Kelimeler: *bünye modeli, viskoplastisite, akma yüzeyi, üç eksenli gerilme, zemin davranışı*

ABSTRACT

Experimental studies on soils have shown that their strength and yielding behavior may vary depending on loading rate, stress level, and stress path. Although classical elastoplastic constitutive models can represent some aspects of soil behavior under specific conditions, they are often insufficient to describe the development of rate-dependent inelastic deformations. Therefore, in this study, a constitutive modelling framework is presented by combining a Perzyna-type viscoplastic formulation with the pressure- and Lode-angle-dependent Mortara yield surface. In the adopted formulation, viscoplastic strains are defined as a function of the normalized overstress, which represents the stress state outside the yield surface. To evaluate the model response, drained triaxial compression element tests were performed. Within this scope, the axial strain rate and the viscoplastic fluidity parameter were varied to investigate their effects on the stress–strain response and overstress evolution. The results show that increasing the loading rate leads to higher deviatoric stress and overstress levels. In contrast, increasing promotes faster viscoplastic flow and reduces the overstress level. These findings indicate that the adopted Perzyna–Mortara-based formulation has the potential to represent rate-dependent inelastic soil behavior under drained triaxial conditions.
Keywords: *constitutive model, viscoplasticity, yield surface, triaxial stress, soil behavior*

[1] Doktora Öğr., Politecnico di Milano, İtalya, yusuf.kayan@polimi.it (Sorumlu yazar)
[2] Dr., Politecnico di Milano, İtalya, pietro.marveggio@polimi.it
[3] Prof. Dr., Politecnico di Milano, İtalya, claudio.diprisco@polimi.it

1. GİRİŞ

Geoteknik mühendisliğinde sayısal analizlerde zemin davranışı, temel olarak seçilen bünye modeli tarafından tanımlanan gerilme–birim şekil değiştirme ilişkilerine bağlıdır. Zeminlerin doğrusal olmayan davranışı, dilatansi, gerilme yolu bağımlılığı, hız etkisi, yapı bozulması, anizotropi, doygun olmayan davranış ve çevrimsel birikim gibi birçok mekanizmayı içerebilir. Bu nedenle farklı mühendislik problemlerinde güvenilir sonuçlar elde edebilmek için, incelenen problemin özelliklerine uygun gelişmiş bünye modellerinin kullanılması gerekmektedir. Ancak bu tür modellerin genel amaçlı doğrusal olmayan sayısal çözüm çerçevelerine dâhil edilmesi doğruluk, sayısal kararlılık, hesaplama verimliliği ve model parametrelerinin anlamlılığı açısından önemli zorluklar içermektedir.

Klasik elastoplastik formülasyon, ani olarak uygulanan bir yük sonucunda oluşan tüm birim şekil değiştirmelerin eş zamanlı olarak geliştiği varsayımına dayanır. Bu yaklaşım birçok yarı-statik yükleme problemi için kabul edilebilir olsa da deneysel gözlemler, geri dönüşsüz deformasyonların gelişmesi için belirli bir zamana ihtiyaç duyduğunu göstermektedir. Özellikle hız bağımlı davranışın önemli olduğu problemlerde gerçek zaman etkisinin bünye formülasyonuna dâhil edilmesi gerekmektedir. Bu amaçla klasik elastoplastik yaklaşım, gerilme–birim şekil değiştirme integrasyonuna zaman değişkeni dâhil edilerek viskoplastik formülasyonlara genişletilmiştir. Metallerde Lüders bantlarının yayılımı ve Portevin–Le Chatelier etkisi gibi olaylar hız bağımlı deformasyon davranışı ile ilişkilendirilirken, zeminlerde kayma bandı oluşumu, sünme ve zamana bağlı göçme mekanizmaları benzer şekilde viskoplastik yaklaşımlarla incelenmiştir (Desai ve Zhang, 1987; Cristescu, 1994; Samtani vd., 1996; Cristescu ve Cazacu, 2000). Bu tür davranışların modellenebilmesi amacıyla farklı viskoplastik bünye modelleri geliştirilmiştir. Bunlar arasında Perzyna tipi viskoplastisite yaklaşımı, özellikle geoteknik uygulamalarda yaygın olarak kullanılan formülasyonlardan biridir (Perzyna, 1963; Perzyna, 1966; Olszak ve Perzyna, 1969).

Perzyna yaklaşımının temel özelliği, klasik hızdan bağımsız elastoplastik modellerden farklı olarak gerilme durumunun akma yüzeyinin dışına çıkmasına izin vermesidir. Bu durumda akma fonksiyonu pozitif değer alabilir ve bu etki "aşırı-gerilme" kavramı ile ifade edilir. Viskoplastik birim şekil değiştirme hızı, bu aşırı-gerilme büyüklüğüne bağlı olarak tanımlanır. Böylece malzemenin geri dönüşsüz deformasyonlarının ani olarak değil, zamana bağlı olarak geliştiği kabul edilir. Perzyna modelinin temel özellikleri ve sayısal ayrıklaştırılması birçok çalışmada ayrıntılı olarak ele alınmıştır (Simo, 1989; Sluys, 1992; Wang, 1997; Simo ve Hughes, 1998). Bunun yanında, hız bağımlılığının doğrudan akma yüzeyine dâhil edildiği tutarlılık modelleri ve hasar ile birleştirilmiş hız bağımlı akma formülasyonları da literatürde önerilmiştir (Wang, 1997; Mahnken vd., 1998; Johansson vd., 1999; Ristinmaa ve Ottosen, 2000).

Bu çalışmada, zeminlerin hız bağımlı inelastik davranışını temsil etmek amacıyla Perzyna tipi viskoplastik formülasyon ile basınca ve Lode açısına bağlı Mortara akma yüzeyi birlikte kullanılmıştır. Böylece hem ortalama gerilme seviyesinin hem de deviatorik düzlemdeki gerilme durumunun viskoplastik davranış üzerindeki etkilerinin aynı çerçevede değerlendirilmesi amaçlanmıştır. Çalışma kapsamında öncelikle kullanılan viskoplastik formülasyon ve akma yüzeyi tanımlanmış, ardından drenajlı üç eksenli basınç koşulları altında eleman testleri gerçekleştirilmiştir. Eleman testlerinde eksenel birim şekil değiştirme hızı ve viskoplastik akış parametresi değiştirilerek modelin hız bağımlı davranışı temsil etme kapasitesi değerlendirilmiştir.

2. VİSKOPLASTİK FORMÜLASYON

Klasik bünye modellerine viskoz etkilerin dâhil edilmesi için farklı yaklaşımlar bulunmakla birlikte, geoteknik mühendisliği uygulamalarında en yaygın kullanılan yöntemlerden biri Perzyna tipi viskoplastisite yaklaşımıdır. Bu yaklaşımda toplam birim şekil değiştirme hızı, elastik ve viskoplastik bileşenlerin toplamı olarak ifade edilir:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^{el} + \dot{\varepsilon}^{vp} \tag{1}$$

Burada $\dot{\varepsilon}^{el}$ elastik rijitlik tensörü tarafından kontrol edilen elastik birim şekil değiştirme hızını, $\dot{\varepsilon}^{vp}$ ise zamana bağlı viskoplastik birim şekil değiştirme hızını göstermektedir.

Elastoplastik modellerden farklı olarak, viskoplastisite formülasyonunda gerilme durumu akma yüzeyinin içinde, üzerinde veya dışında bulunabilir. Bu nedenle klasik elastoplastisitede geçerli olan tutarlılık koşulu viskoplastik formülasyonda zorunlu değildir. Mevcut gerilme durumunun akma yüzeyinin dışına çıkmasına izin verilir ve bu durum aşırı gerilme (overstress) kavramı ile temsil edilir.

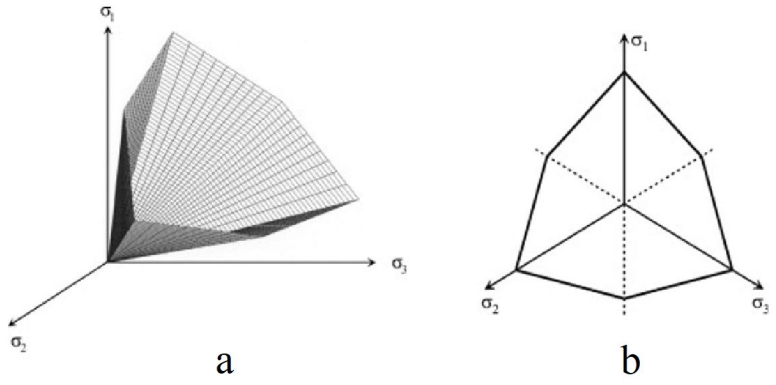
Perzyna yaklaşımında viskoplastik birim şekil değiştirme hızı, mevcut gerilme durumuna bağlı skaler bir fonksiyon aracılığıyla tanımlanır. Bu skaler fonksiyon genellikle viskoz çekirdek olarak adlandırılır ve akma fonksiyonunun veya normalize edilmiş aşırı gerilme büyüklüğünün değerine bağlıdır.

3.1. Akma Yüzeyi

Bu çalışmada kullanılan akma yüzeyleri Mohr-Coulomb kriterini esas alan Mortara (2015; 2026) tarafından önerilen yöntem kullanılarak tanımlanmıştır. Model meridyenel düzlemde basınç bağımlı bir fonksiyon ile deviatorik düzlemde Lode açısına bağlı bir fonksiyonun çarpımsal birleşimi olarak tanımlanmıştır. Akma fonksiyonu aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$F = q^2 - \Phi_p(p, p_t, p_c).\Phi_\theta^2(\theta) \tag{2}$$

Burada q deviatorik gerilme büyüklüğünü, p ortalama gerilmeyi, p_t çekme tarafındaki sınır parametresini ve p_c basınç tarafındaki karakteristik gerilme parametresini göstermektedir. $\Phi_p(p, p_t, p_c)$ akma yüzeyinin meridyen düzlemindeki basınç bağımlı kısmını $\Phi_\theta(\theta)$ ise deviatorik düzlemdeki Lode açısı bağımlı kısmını temsil etmektedir. Şekil 3'te model akma yüzeyleri gösterilmiştir.



Şekil 1. 3 boyutlu asal gerilme uzayında Mohr-Coulomb modelin akma yüzeyleri (a), deviatorik düzlemde akma yüzeyleri (b)

3.2. Viskoplastik Akış Kuralı

Perzyna tipi viskoplastik formülasyonda inelastik deformasyonlar, gerilme durumunun akma yüzeyi dışına çıkması durumunda gelişir. Bu amaçla normalize edilmiş aşırı-gerilme büyüklüğü aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$f = \frac{F(\boldsymbol{\sigma}, p_c)}{\sigma_0^2 + \alpha_{os} p^2} \tag{3}$$

Burada σ_0 referans gerilme büyüklüğü, α_{os} ise basınca bağlı aşırı-gerilme ölçeklendirmesini kontrol eden katsayıdır. Paydanın p^2 terimi içermesi, aşırı-gerilme ölçüsünün ortalama gerilme seviyesine bağlı olarak ölçeklenmesini sağlamaktadır.

Viskoplastik çarpan hızı, $\gamma_f = \langle f \rangle^n$ şeklinde tanımlanmıştır. Burada γ_f viskoplastik akış parametresi, n aşırı-gerilme üssü ve $\langle \cdot \rangle$ Macaulay parantezidir.

Bu tanıma göre $F \leq 0$ olduğunda viskoplastik akış gelişmez. Buna karşılık $F>0$ olduğunda aşırı-gerilme pozitif olur ve viskoplastik deformasyon hızı γ_f ve n parametrelerine bağlı olarak belirlenir. Modelde hız bağımlı davranışın temelini oluşturan viskoplastik birim şekil değiştirme hızı Eşitlik 4'te tanımlanmıştır.

$$\gamma_f = \langle f \rangle^n \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \tag{4}$$

Bu çalışmada akma fonksiyonu ile plastik potansiyel fonksiyonunun birbirinden farklı tanımlanmasına izin veren bağımlı olmayan akış (non-associative) formülasyonu kullanılmıştır. Akma yüzeyi F ile tanımlanırken, viskoplastik akış yönünü belirleyen plastik potansiyel fonksiyonu G ile tanımlanmıştır. Bu yaklaşım, zeminlerde dayanım ve hacimsel deformasyon davranışlarının birbirinden bağımsız olarak kontrol edilebilmesini sağlar. Özellikle genleşme davranışının akma yüzeyinden bağımsız şekilde düzenlenebilmesi açısından bağımlı olmayan formülasyon geoteknik uygulamalar için önemlidir.

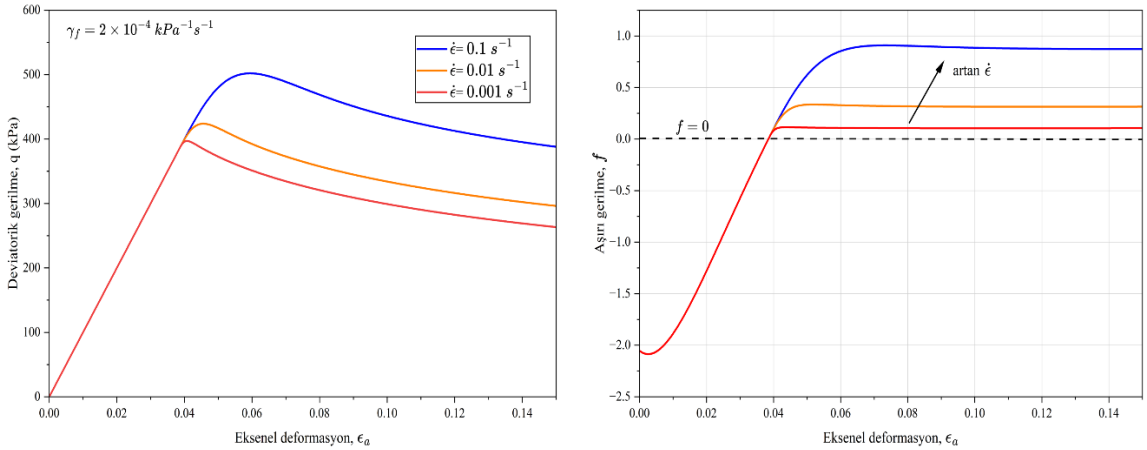
3. ELEMAN TESTLERİ

Bu bölümde, önceki bölümde tanımlanan Perzyna–Mortara tabanlı viskoplastik formülasyonun Matlab yazılım ortamında drenajlı üç eksenli basınç koşulları altındaki davranışı ele alınmıştır. Sayısal eleman testlerinde yanal gerilmeler sabit tutulmuş, eksenel birim şekil değiştirme ise kontrollü olarak uygulanmıştır. Bu amaçla $\sigma_2 = \sigma_3 = -p_{conf}$ koşulu korunmuş ve her yükleme adımında radyal birim şekil değiştirme artımı, yanal gerilme koşulunu sağlayacak şekilde iteratif olarak belirlenmiştir. Model davranışını görmek için iki temel parametrik çalışma gerçekleştirilmiştir. İlk olarak eksenel birim şekil değiştirme hızı ($\dot{\varepsilon}$) değiştirilerek yükleme hızının viskoplastik davranış üzerindeki etkisi incelenmiştir. İkinci olarak viskoplastik akış parametresi (γ_f) farklı değerlerde seçilerek modelin aşırı gerilme gelişimine ve gerilme–birim şekil değiştirme davranışına olan duyarlılığı değerlendirilmiştir.

3.1. Şekil Değiştirme Hızı Etkisi

Şekil 2'de farklı eksenel birim şekil değiştirme hızları için drenajlı üç eksenli basınç testi sonuçları karşılaştırılmaktadır. Şekil 1-a'da görüldüğü üzere, yükleme hızının artmasıyla birlikte modelin ürettiği deviatorik gerilme seviyesi artmaktadır. Tüm analizlerde

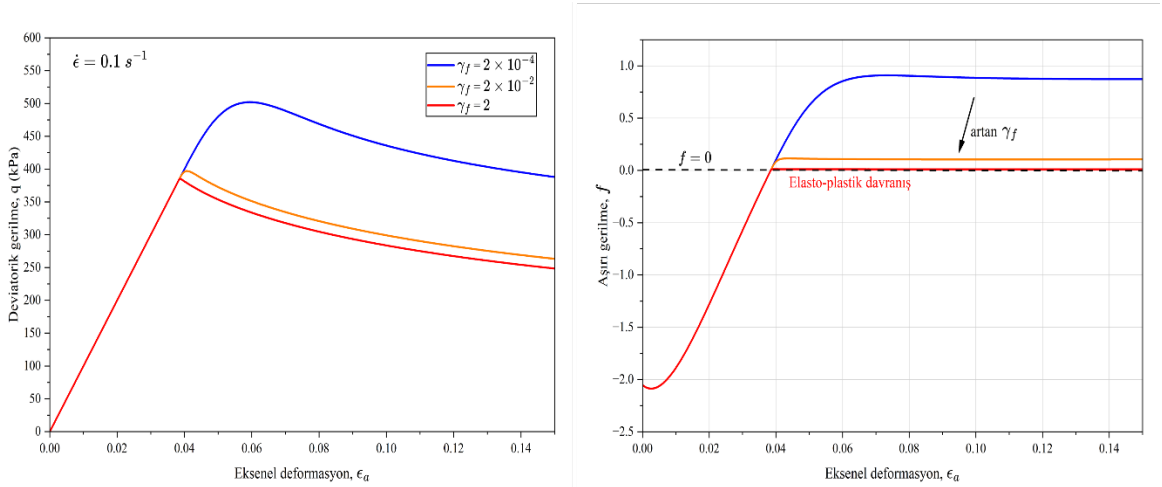
başlangıçta hızlı bir gerilme artışı görülmekte, ardından düşük birim şekil değiştirme seviyelerinde tepe değere ulaşılarak yumuşama davranışı gelişmektedir. Ancak daha yüksek yükleme hızlarında hem tepe deviatorik gerilme hem de büyük deformasyon seviyelerindeki artık gerilme daha yüksek elde edilmiştir. Bu davranış Perzyna tipi viskoplastik formülasyon açısından beklenen bir sonuçtur. Düşük yükleme hızlarında malzeme viskoplastik deformasyon geliştirmek için daha fazla zamana sahip olduğundan, gerilme durumu akma yüzeyine daha yakın kalabilmektedir. Buna karşılık yüksek yükleme hızlarında viskoplastik akışın gelişmesi için yeterli süre olmadığından daha yüksek bir aşırı-gerilme oluşmakta ve buna bağlı olarak model daha yüksek görünür dayanım üretmektedir. Bu nedenle $\dot{\varepsilon} = 0.1s^{-1}$ için elde edilen deviatorik gerilme değerleri, düşük hızlara kıyasla belirgin şekilde daha yüksektir. Şekil 1-b'de bu davranış gösterilmiş olup, yükleme hızı arttıkça aşırı-gerilme değeri daha yüksek seviyelere ulaşmıştır. Bu sonuçla birlikte modelde hız bağımlı davranışın viskoplastik mekanizma aracılığıyla temsil edildiğini göstermektedir. Düşük ve orta hızlar arasındaki fark sınırlı kalırken, yüksek hızda cevabın belirgin biçimde değişmesi, modelin yükleme hızına doğrusal olmayan bir duyarlılık gösterdiğini ortaya koymaktadır.



Şekil 2. Farklı şekil değiştirme hızları için deviatorik gerilme-eksenel deformasyon (a) ve aşırı gerilme-eksenel deformasyon (b) grafiklerinin karşılaştırılması

3.2. Viskoplastik Akış Parametresi Etkisi

Şekil 3'te üç farklı viskoplastik akış parametresi (γ_f) seçilerek drenajlı üç eksenli basınç testiyle, malzemenin eksenel deformasyonla birlikte deviatorik gerilme ve aşırı-gerilme üzerindeki etkisi incelenmiştir. Şekil 2-a'da γ_f arttıkça deviatorik gerilme seviyesinin azaldığı görülmektedir. Küçük γ_f değerlerinde viskoplastik akışın daha yavaş gelişmesi ve gerilme durumunun akma yüzeyinin daha fazla dışına çıkabilmesi nedeniyle seçilen en küçük γ_f değerinde ($\gamma_f = 0.02$) model en yüksek deviatorik gerilme değerini üretirken, $\gamma_f = 2.0$ için daha düşük bir gerilme seviyesi elde edilmiştir. Şekil 2-b'de de düşük viskoplastik akış parametresinde yüksek aşırı-gerilme değeri hesaplanmıştır.



Şekil 3. Farklı viskoplastik akış parametreleri için deviatorik gerilme-eksenel deformasyon (a) ve aşırı gerilme-eksenel deformasyon (b) grafiklerinin karşılaştırılması

4. SONUÇLAR

Bu çalışmada, zeminlerin hız bağımlı inelastik davranışını temsil etmek amacıyla Perzyna tipi viskoplastik formülasyon ile basınca ve Lode açısına bağlı akma yüzeyi birlikte kullanılmıştır. Benimsenen formülasyonda viskoplastik deformasyonlar, akma yüzeyi dışındaki gerilme durumunu ifade eden normalize edilmiş aşırı-gerilme büyüklüğüne bağlı olarak tanımlanmıştır. Böylece gerilme durumunun hem meridyen düzlemindeki hem de deviatorik düzlemdeki etkileri, hız bağımlı viskoplastik akış çerçevesi içinde dikkate alınmıştır. Model davranışını değerlendirmek amacıyla sayısal ortamda drenajlı üç eksenli basınç koşulları altında eleman testleri gerçekleştirilmiştir. Analizlerde yanal gerilmeler sabit tutulmuş, eksenel birim şekil değiştirme kontrollü olarak uygulanmıştır. Bu kapsamda iki ayrı parametrik çalışma yapılarak eksenel birim şekil değiştirme hızı ($\dot{\epsilon}$) ve viskoplastik akış parametresi (γ_f) değiştirilmiştir. Diğer model parametreleri sabit tutularak her bir parametrenin model üzerindeki etkisi ayrı ayrı değerlendirilmiştir.

Yükleme hızı etkisinin incelendiği analizlerde, eksenel birim şekil değiştirme hızının artmasıyla birlikte daha yüksek deviatorik gerilme ve aşırı-gerilme seviyeleri elde edilmiştir. Düşük yükleme hızlarında viskoplastik deformasyonların gelişmesi için daha fazla zaman bulunduğundan gerilme durumu akma yüzeyine daha yakın kalmaktadır. Buna karşılık yüksek yükleme hızlarında viskoplastik akış daha gecikmeli gelişmekte, gerilme durumu akma yüzeyinin daha fazla dışına çıkmakta ve buna bağlı olarak daha yüksek görünür dayanım oluşmaktadır. Bu sonuç, Perzyna tipi viskoplastik formülasyonun hız bağımlı zemin davranışını temsil edebildiğini göstermektedir.

Viskoplastik akış parametresi (γ_f)'nin etkisi incelendiğinde, γ_f değerinin artmasıyla birlikte modelin daha hızlı viskoplastik akış geliştirdiği görülmüştür. Küçük γ_f değerlerinde viskoplastik deformasyonlar daha gecikmeli oluşmakta, bu nedenle daha yüksek deviatorik gerilme ve aşırı-gerilme seviyeleri elde edilmektedir. Büyük γ_f değerlerinde ise viskoplastik deformasyonlar daha hızlı gelişmekte, gerilme durumu akma yüzeyine daha yakın kalmakta ve aşırı gerilme seviyesi azalmaktadır. Bu nedenle γ_f modelin hız bağımlı inelastik akışa olan duyarlılığını kontrol eden temel parametrelerden biri olarak değerlendirilebilir.

Sonuç olarak, bu çalışma kapsamında kullanılan viskoplastik formülasyonun drenajlı üç eksenli basınç koşulları altında hız bağımlı inelastik davranışı temsil etme potansiyeline sahip olduğu gösterilmiştir. Eleman testleri, hem yükleme hızının hem de viskoplastik akış parametresinin gerilme–birim şekil değiştirme cevabı ve aşırı-gerilme gelişimi üzerinde belirgin etkiler oluşturduğunu ortaya koymuştur. Bununla birlikte, mevcut çalışma eleman testi düzeyinde bir değerlendirme sunmakta olup, model parametrelerinin deneysel verilerle kalibre edilmesi ve farklı gerilme yolları altında doğrulanması ileriki çalışmalar için önemli bir adım olarak değerlendirilmektedir.

KAYNAKLAR

Cristescu, N.D. (1994), "Viscoplasticity of Geomaterials", Visco-Plastic Behaviour of Geomaterials, Springer-Verlag, Wien-New York, 103-207.

Cristescu, N. D., & Cazacu, O. (2000). On creep flow of natural slopes. In ARMA North America Rock Mechanics Symposium (pp. ARMA-2000).

Desai, C. S., & Zhang, D. (1987). Viscoplastic model for geologic materials with generalized flow rule. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 11(6), 603-620.

Johansson, M., Mahnken, R., & Runesson, K. (1999). Efficient integration technique for generalized viscoplasticity coupled to damage. International journal for numerical methods in engineering, 44(11), 1727-1747.

Mahnken, R., Johansson, M., & Runesson, K. (1998). Parameter estimation for a viscoplastic damage model using a gradient-based optimization algorithm. Engineering Computations, 15(7), 925-955.

Mortara, G. (2015). A constitutive framework for the elastoplastic modelling of geomaterials. International Journal of Solids and Structures, 63, 139-152.

Mortara, G. (2026). Lode dependence incorporating the Mohr-Coulomb deviatoric section. Acta Mechanica, 237(3), 1399-1414.

Olszak, W., & Perzyna, P. (1969). On thermal effects in viscoplasticity. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP, 20(5), 676-680.

Perzyna, P. (1963). The constitutive equations for rate sensitive plastic materials. Quarterly of applied mathematics, 20(4), 321-332.

Perzyna, P. (1966). Fundamental problems in viscoplasticity. Advances in applied mechanics, 9, 243-377.

Ristinmaa, M., & Ottosen, N. S. (2000). Consequences of dynamic yield surface in viscoplasticity. International Journal of Solids and Structures, 37(33), 4601-4622.

Samtani, N. C., Desai, C. S., & Vulliet, L. (1996). An interface model to describe viscoplastic behavior. International journal for numerical and analytical methods in geomechanics, 20(4), 231-252.

Simo, J. C. (1989). Strain softening and dissipation: a unification of approaches. Cracking and damage: strain localization and size effect, 440-461.

Simo, J. C., & Hughes, T. J. (1998). Computational inelasticity. New York, NY: Springer New York.

Sluys, L.J. (1992), Wave Propagation, Localisation and Dispersion in Softening Solids, PhD Thesis, Delft University of Technology, Delft, The Netherlands.

Wang, W.M., Sluys, L.J. ve de Borst, R. (1997), "Viscoplasticity for Instabilities Due to Strain Softening and Strain-Rate Softening", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 40, No 20, 3839-3864.